SUBJECT: 5/4

$f(x,y,Z)$ = حقل سلمي

$\vec{F} = P(x,y,Z)\vec{i} + G(x,y,Z)\vec{j} + Q(x,y,Z)\vec{k}$ حقل متجهي

حيث P ، G ، Q دوال سلمية

تدرج حقل سلمي:

ليكن $f(x,y,Z)$ حقل سلمي معرف على النطاق $D \subset R^2$ ويملك مشتقات جزئية مستمرة في النطاق D.

التعريف: تدرج الحقل السلمي f هو حقل متجهي يرمز له بـ $\overrightarrow{grad f}$ ويعطى بالعلاقة:

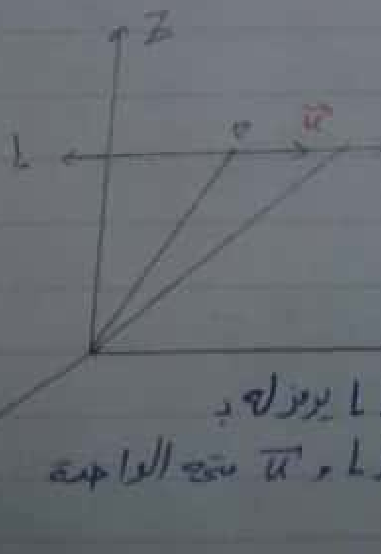
$$\overrightarrow{grad f} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial Z}\vec{k}$$

أي أن مركبات المتجه $\overrightarrow{grad f}$ هي $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial Z}\right)$

مثال: أوجد $\overrightarrow{grad f}$ حيث $f = 2xy + Z^2$

$$\overrightarrow{grad f} = 2y\vec{i} + 2x\vec{j} + 2Z\vec{k}$$

المشتقة الموجهة لدالة سلمية:



لتكن $f(x,y,Z)$ دالة سلمية معرفة على $D \subseteq R^3$ ولتكن $P_0 \in D$ ، L خطاً ماراً من P_0

$\vec{u} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ متجه الواحدة منحاه منحى الخط L

إن المشتقة الموجهة للدالة f وفق منحى الخط L يرمز له بـ $\frac{\partial f}{\partial A}(P_0)$ حيث A متجه ومنحاه منحى الخط L ، $\vec{u}$ متجه الواحدة يعطى بالعلاقة:

$$\frac{\partial f}{\partial A}(P_0) = \overrightarrow{grad f} \cdot \vec{u} =$$

SUBJECT

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(P_0)\vec{k} \right)(\cos\alpha , \cos\beta , \cos\gamma)$$

(2) $$\frac{\partial f}{\partial A}(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

ملاحظة: من العلاقة (1) نجد أن:

$$\frac{\partial f}{\partial A}(P_0) = |\overrightarrow{grad} f(P_0)| \cdot \cos\theta$$

حيث θ الزاوية بين $\vec{u}$ و $\overrightarrow{grad f}$.

أي أن $\frac{\partial f}{\partial A}(P_0)$ يبلغ أكبر قيمة له عندما $\theta = 0$ (لأن $grad f , \vec{u}$)

المشتق ذاته يبلغ أصغر قيمة جبرية له عندما يكون بالاتجاه المعاكس

$\frac{\partial f}{\partial A}(P_0) = 0$ عندما $\vec{u} \perp \overrightarrow{grad f}$

مثال: أوجد المشتق الموجه للدالة $f = 2xy + z^2$

وفق المتجه $\vec{A} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$

في النقطة $P_0(1, -1, 0)$

الحل: لدينا: $\overrightarrow{grad} f = 2y\vec{i} + 2x\vec{j} + 2z\vec{k}$

$$\overrightarrow{grad} f(P_0) = (-2\vec{i} + 2\vec{j})$$

ولدينا متجه الواحدة للمتجه $\vec{A}$

$$\vec{u}_{\vec{A}} = \frac{1}{\sqrt{14}}(2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k})$$

$$\frac{\partial f}{\partial A}(P_0) = \frac{1}{\sqrt{14}}(-2\vec{i} + 2\vec{j})(2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{14}}(-4 + 2) = \frac{-8}{\sqrt{14}}$$

المؤثر التفاضلي المتجهي ∇ أو (nabla) نابلا :

المؤثر التفاضلي المتجهي ∇ يعطى بالشكل :

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

يشبه تركيب المتجه لكنه حقيقة ليس متجهاً يؤثر على الحقول السلمية والمتجهية كما سنرى .

نفرض $f(x,y,z)$ حقل سلمي :

بالتعريف

$$\vec{\nabla f} = \overrightarrow{grad f} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) f$$

$$\vec{\nabla f} = \overrightarrow{grad f} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{k}$$

ملاحظات :

1. إن المؤثر ∇ يشبه في خواصه خواص عملية الاشتقاق لمجموع دالتين وجداء دالتين وخارج قسمة دالتين .

- $\vec{\nabla}(\vec{f}+\vec{g}) = \nabla\vec{f} + \nabla\vec{g}$
- $\vec{\nabla}(\vec{f}\cdot\vec{g}) = g\cdot\nabla f + f\cdot\nabla g$
- $\vec{\nabla}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\,\vec{\nabla f} - f\,\vec{\nabla g}}{g^2}$ ، $g \neq 0$

2. إذا كان $\vec{\nabla f} = \vec{F}$

في هذه الحالة نقول أن الحقل المتجهي $\vec{F}$ مشتق من دالة كمون سلمي f أو يدعى حقلاً محافظاً .

$$\vec{F} = 2x\vec{i} + 2xy\vec{j} + z\vec{k}$$

هل F حقلاً محافظاً

عليك في هذه الحالة أن تثبت أن $\vec{F}$ هو مشتق من دالة سلمية F

$\vec{\nabla F} = \vec{F}$

الحل : $F = (x^2 y + \frac{z^2}{2})$

SUBJECT:

المعنى الهندسي للتدرج:

ليكن S سطحاً في الفضاء R^3 معطى بالدالة السلمية $f(x,y,z)=0$

فإن المعنى الهندسي لتدرج الحقل الهندسي S يمثل الناظم $\vec{n}$ على السطح S

وبالتالي معادلة المستوي المماس للسطح S في نقطة $M_0(x,y,z)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}M_0(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}M_0(y-y_0)+\frac{\partial f}{\partial z}M_0(z-z_0)=0$$

حيث $M(x,y,z)$ نقطة متحولة في المستوي الهندسي

تفرق (تباعد) حقل متجهي:

$$\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

حقل متجهي معرف على $D\subset R^3$ حيث P , Q , R حقول سلمية تملك مشتقات جزئية على الأقل من المرتبة الأولى ومستمرة على $D\subseteq R^3$.

إن تفرق الحقل المتجهي $\vec{F}$ هو حقل سلمي يرمز له بـ $\operatorname{dif}\vec{F}$ ويعطى بالعلاقة:

$$\operatorname{dif}\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

نلاحظ أن:

$$\operatorname{dif}\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{k}\right)$$

أي أن $\operatorname{dif}\vec{F}=\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$

مع ملاحظة أن $\nabla f\neq F\nabla$ ($\vec{F}\cdot\nabla$ ليس له معنى).

المؤثر التفاضلي ∇^2 / المؤثر اللابلاسي :

يعرف المؤثر اللابلاسي ∇^2 بالشكل :

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \nabla(\overrightarrow{\nabla f})$$

ومنه :

$$= \nabla(\overrightarrow{grad f}) = div(\overrightarrow{grad f})$$

حيث f حقل سلمي :

$$\nabla^2 f = \nabla \overrightarrow{grad f} = div(\overrightarrow{grad f})$$

خواص تباعد حقل متجهي :

لتكن $\vec{F}$ ، $\vec{G}$ حقلين متجهين يطالق كل منهما ومشتقات جزئية مستمرة على $D \subseteq R^3$.

1) $div(\vec{F} + \vec{G}) = div\vec{F} + div\vec{G}$

2) $div(\vec{F}\,\vec{G}) = \vec{F}\, div\vec{G} + \vec{G} \cdot grad\vec{F}$

مثال: إذا كان $\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

متجه الموضع لنقطة ما في الفضاء $oxyz$ أثبت أن $\nabla^2 \frac{1}{r} = 0$

حيث $|r| = |\vec{R}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

أي أثبت أن :

$$\nabla^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \overset{?}{=} 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} = -x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2y^2-x^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

دوران حقل متجه:

ليكن $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ حقل متجه معرف وله مشتقات جزئية مستمرة في النطاق $D \subseteq R^3$، ان دوران الحقل المتجه $\vec{F}$ والذي نرمزله بـ $rot\vec{F}$ هو حقل متجها مركباته هي مفكوك المحدد:

$$rot\vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \nabla \times \vec{F}$$

$$rot\vec{F} = \nabla \times \vec{F}$$

ملاحظة: إذا كان $rot\vec{F} = 0$ يدعى $\vec{F}$ حقلاً محافظاً و إذا فرضنا أن $rot\vec{F} = \vec{G}$ عندئذٍ يسمى G حقلاً مستقلاً من دالة تكون متجهة أو يدعى حقل لالاسيلي.

وطبعاً نقبل من دون ~~برهان~~ إثبات أن الشرط اللازم والكافي كي يكون $\vec{G}$ مشتقاً من دالة تكون متجهة هو أن يكون $dif\ \vec{G} = 0$

$$\vec{G} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$$

$$dif\ \vec{G} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$$

خواص دوران حقل متجه (تقبل بدون إثبات)

نفرض $\vec{F}, \vec{G}$ حقلين متجهين و f دالة سلمية عندئذٍ تتحقق الخواص الآتية:

1) $rot(f\vec{G}) = f\,rot\vec{G} + grad\,f \times \vec{G}$



SUBJECT: Ø

2] $rot(f \cdot \vec{G}) = f \, rot \, \vec{G} + grad f \times \vec{G}$

3] $dif(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \, rot \vec{F} - \vec{F} \, rot \vec{G}$

4] $rot(grad \vec{F}) = \nabla \times (\nabla f) = 0$

5] $dif(rot \, \vec{F}) = \nabla(\nabla \times \vec{F}) = 0$

6] $rot(rot \, \vec{F}) = \nabla(\nabla \times \vec{F}) = \nabla(\nabla \cdot f) - \nabla^2 F = grad(dif \vec{F}) - \nabla^2 F$